Identité d'Euler

30 minutes
4
Livre de recettes anciennes

L'identité d'Euler est souvent considérée comme l'une des formules les plus belles des mathématiques. Elle relie cinq des nombres les plus fondamentaux — e, i, π, 1, et 0 — dans une relation simple et élégante. Ce qui la rend fascinante, c'est qu'elle unit des concepts provenant de domaines apparemment sans lien : les exponentielles, les nombres complexes, et la trigonométrie. Une véritable symphonie mathématique où chaque "note" joue un rôle essentiel.

Préparation

1 Mise en place :
L'identité d'Euler est exprimée par l'équation suivante :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Cette équation combine des constantes mathématiques fondamentales. Mais comment une exponentielle impliquant un nombre imaginaire peut-elle aboutir à une relation aussi simple ? Cela mérite d'être exploré en profondeur.

Ingrédients

e	le nombre e
i	le bombre imaginaire
π	la constante pi
$0, 1$	les nombres 0 et 1
$\sum^{\infty}$	quelques séries
$\cos, \sin$	un soupcon de trigonométrie

2 Développement en série exponentielle :
L'exponentielle d'un nombre complexe $z = i\theta$ peut être définie par une série de Taylor :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

En substituant $z = i\theta$, nous obtenons la série suivante :

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

Cette série peut être séparée en deux parties : une partie réelle et une partie imaginaire† :

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

3 Lien avec la trigonométrie :
En analysant ces deux séries, on remarque que :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Ce résultat est la *formule d'Euler*, une relation fondamentale qui connecte les fonctions exponentielles et trigonométriques.

 Suite sur la prochaine page

4 **Application à $\theta = \pi$:**
En substituant $\theta = \pi$, nous obtenons :

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$$

Or, $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$, ce qui donne :

$$e^{i\pi} = -1$$

En ajoutant 1 de chaque côté, on obtient l'identité d'Euler :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Présentation

L'identité d'Euler, $e^{i\pi} + 1 = 0$, incarne l'élégance et la simplicité des mathématiques. Elle lie entre eux des concepts d'analyse, de géométrie et d'algèbre, et représente un point culminant de la beauté mathématique.

L'identité d'Euler est souvent qualifiée de "plus belle formule mathématique" car elle réunit les nombres e, i, π, 1, et 0, chacun jouant un rôle unique dans cette équation. Il est fascinant de voir comment des concepts aussi différents se combinent dans une seule expression, créant une véritable harmonie mathématique.

Liens vers d'autres recettes ou contextes intéressants :

- **Les séries de Taylor :** Comment ces séries peuvent représenter des fonctions analytiques comme e^x, $\sin(x)$, et $\cos(x)$, donnant des insights précieux sur le lien entre exponentielles et trigonométrie.
- **Les nombres complexes :** L'utilisation des nombres complexes dans les domaines de la physique, des oscillations, et des ondes.
- **Les applications de l'identité d'Euler :** De l'analyse des circuits électriques en physique à la mécanique quantique, cette identité est plus qu'une simple curiosité théorique.

Tuyau

† *La partie réelle correspond au développement de* $\cos(\theta)$ *et la partie imaginaire à* $\sin(\theta)$. *Cela découle directement des séries de Taylor pour ces fonctions trigonométriques.*

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

La suite de Fibonacci et le nombre d'Or

- 30 minutes
- 4
- Livre de recettes anciennes

Derrière la simplicité de la suite de Fibonacci se cache une harmonie inattendue : le rapport entre deux termes successifs tend vers le nombre d'or ϕ. Ce nombre, présent dans la nature et l'art, relie les mathématiques à la beauté du monde. Ce lien subtil entre arithmétique et géométrie révèle que même dans les structures les plus simples, une élégance profonde attend d'être découverte.

Préparation

1 Mise en place (définition de la suite de Fibonacci) :
La suite de Fibonacci commence par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. Chaque terme suivant est défini par la relation :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2$$

Les premiers termes de la suite sont :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Elle apparaît souvent dans des phénomènes naturels comme la disposition des feuilles sur une tige, les spirales dans les coquilles d'escargots, et bien d'autres.

Ingrédients

$F_0 = 0$	un premier terme
$F_1 = 1$	un deuxième terme
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$	une relation de récurence
$\pm, \times, \div$	un peu d'algèbre
$\surd$	une pincée de racine carrée
$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	le nombre d'or

2 Résolution de la relation de récurrence :
Pour comprendre la relation entre la suite de Fibonacci et le nombre d'or, nous devons résoudre cette relation de récurrence.

Posons $F_n = r^n$ comme solution générique de la relation de récurrence. Substituons cela dans $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$:

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$$

En simplifiant, on obtient l'équation caractéristique suivante :

$$r^2 = r + 1$$

Suite sur la prochaine page

Cette équation quadratique s'écrit :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Les solutions de cette équation sont obtenues via la formule du discriminant :

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

3 **Extraction des solutions (le nombre d'or) :**
Nous obtenons deux racines pour r :

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \quad \text{(le nombre d'or)}$$

$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \bar{\phi} \quad \text{(le conjugué du nombre d'or)}$$

4 **Formule générale pour F_n :**
La solution générale de la suite de Fibonacci est une combinaison linéaire des deux solutions trouvées :

$$F_n = A \cdot \phi^n + B \cdot \bar{\phi}^n$$

Pour trouver les constantes A et B, utilisons les conditions initiales :
- $F_0 = 0$ implique $A + B = 0$, donc $B = -A$.
- $F_1 = 1$ implique $A \cdot \phi - A \cdot \bar{\phi} = 1$, ce qui donne $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

La formule explicite devient alors :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n - \bar{\phi}^n \right)$$

5 **Lien avec le nombre d'or :**
À mesure que n augmente, $\bar{\phi}^n$ tend rapidement vers 0 (car $|\bar{\phi}| < 1$), et ainsi, pour de grands n, F_n est approximé par :

$$F_n \approx \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$$

Cela montre que le rapport entre deux termes successifs de la suite de Fibonacci tend vers le nombre d'or :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \approx \phi \quad \text{pour } n \to \infty$$

Présentation

La suite de Fibonacci, définie par une simple relation de récurrence, cache un lien profond avec le nombre d'or ϕ. Au fur et à mesure que la suite grandit, le rapport entre les termes successifs se rapproche du nombre d'or, un chiffre qui apparaît dans de nombreux domaines, des mathématiques à l'art et la nature.

Suite sur la prochaine page

Allez plus loin

La suite de Fibonacci et le nombre d'or apparaissent dans de nombreux autres domaines mathématiques et au-delà. Voici quelques connexions fascinantes à explorer :

— **Les spirales logarithmiques et la nature :** Le nombre d'or est présent dans les spirales des coquilles de mollusques, des galaxies, et même des tempêtes. La forme de ces spirales peut être modélisée à partir des rapports successifs de la suite de Fibonacci.
— **Le rectangle d'or :** En associant le nombre d'or à la géométrie, on obtient le rectangle d'or. Ce rectangle a la propriété que lorsqu'on en retire un carré, le rectangle restant conserve les mêmes proportions. Il est également utilisé en architecture et en art, notamment dans les proportions du Parthénon.
— **Le triangle d'or :** Ce triangle isocèle, dont le rapport des côtés respecte le nombre d'or, conduit à des découpages intéressants et est utilisé dans la construction des pentagones réguliers.
— **Le théorème de Binet :** La formule de Binet est une autre manière d'exprimer la suite de Fibonacci de façon directe, reliant ainsi les nombres de Fibonacci à une formule fermée.
— **Les matrices et la suite de Fibonacci :** La suite de Fibonacci peut également être exprimée à travers la multiplication de matrices, une méthode élégante qui offre des perspectives plus larges en algèbre linéaire.
— **Le paradoxe de Fibonacci dans les algorithmes :** Dans les algorithmes de calcul, la suite de Fibonacci a des applications surprenantes, comme dans les arbres binaires de recherche ou les algorithmes d'optimisation. C'est également un exemple classique de la récursion.

Tuyau

Mettre ici pistes ou référence